Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Ueber die Porismen des Euclid und deren Divinatoren**

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik / Literaturzeitung
Band 2 (1857),
Seite 17 – 27.
Signatur UB Heidelberg: L 6::2.1857

Die drei Bände der „Porismen" (Korollare, Folgesätze) von Euklid sind verschollen. Es gab mehrere Versuche, aus Bemerkungen anderer Autoren den Inhalt dieser Bücher zu rekonstruieren (Divination). Moritz Cantor beschreibt diese Versuche, stellt aber fest, dass keinerlei sichere Kenntnis zu gewinnen ist.

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. B. Witzschel.**

Zweiter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1857.

und eine zweite zwischen $\pm \sqrt[4]{\frac{b}{3}}$ und $\pm \infty$.

Die Gleichung

$$x^4 \pm ax - b = 0$$

hat immer eine $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\\text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzel zwischen 0 und $\pm \sqrt[4]{b}$ und eine $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}\right\}$ zwischen $\mp \sqrt[4]{b}$ und $\mp \infty$.

Die Gleichung

$$x^4 \mp ax^3 + b = 0$$

hat, wenn $27a^4 > 256b$, eine $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\\text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzel zwischen 0 und $\pm \sqrt[4]{3b}$ und eine zweite zwischen $\pm \sqrt[4]{3b}$ und $\pm \infty$.

Die Gleichung

$$x^4 \pm ax^3 - b = 0$$

hat immer eine $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\\text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzel zwischen 0 und $\mp \sqrt[4]{b}$ und eine $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}\right\}$ zwischen $\pm \sqrt[4]{b}$ und $\mp \infty$.

II.

Ueber die Porismen des Euclid und deren Divinatoren.

Von Dr. M. Cantor,

Docent an der Universität Heidelberg.

Wenn bei historischen Untersuchungen von einer Verschiedenheit der Schwierigkeiten gesprochen werden kann, so gehören sicher die Forschungen zu den feinsten, bei denen es sich um die Wiederherstellung verloren gegangener Werke aus mehr oder minder sparsamen Resten handelt, und wo es folglich mehr als bei irgend einer anderen Arbeit nöthig ist, sich so in den Geist des Autors zu versetzen und den wissenschaftlichen Standpunkt seines Zeitalters so zu erfassen, dass man sich mit demselben identificirt und die Divination des zu behandelnden Werkes mehr eine Production als eine Reproduction wird. Daraus erklärt es sich, dass wenn auch viele Gelehrte ersten Ranges sich mit solchen Untersuchungen beschäftigten, doch nur bei Werken ein Resultat erschien, welches auch andere als den Forscher selbst befriedigen konnte, theils weil diese nicht im Stande gewesen waren, die Grösse der Aufgabe zu bewältigen, theils weil es schon ein eigenes Studium erfordert, nur ein Urtheil über derartige Versuche abgeben zu können.

Nur selten gelang es später noch deutlichere Spuren des Verlorengegangenen aufzufinden und einzig möchte das Beispiel Viviani's sein, welcher 1659 eine Divination des fünften Buches der Kegelschnitte des Apollonius von Pergä veröffentlichte, die schon wenige Jahre später ihre glänzende Bestätigung in dem arabischen Manuscripte fand, welches durch den Mönch Golius aus dem Oriente mitgebracht, durch Borellius 1661 übersetzt wurde.

Nicht so gut ward es den Wiederherstellern sonstiger Werke des Alterthums, die in ihren vielmehr schwierigen als dankbaren Forschungen um so weiter von einander abwichen, je pflichtgetreuer sie sich von allen neueren Kenntnissen entkleidet in die Natur des Autors versenkt hatten. Leicht erklärlich, hatte doch jeder mit seinen Kenntnissen nicht seinen eigenen Geist abstreifen können, und dieser ist zu verschieden, als dass er nicht von demselben Standpunkte ausgehend je nach seiner Individualität unzählige Wege einschlagen könnte, einschlagen müsste, so dass es hier in gutem Sinne sich bewährt, was unser grösster deutscher Dichter vielleicht etwas boshaft ausspricht: „Es ist der Herren eigner Geist, in dem die Zeiten sich bespiegeln."

Ein Werk, welches besonders die Aufmerksamkeit derer rege gemacht hat, die sich gern dem Reize divinatorischer Untersuchungen hingaben, sind die *Πορίσματα* des Euclid, dessen Titel wir nicht einmal verstehen, da die Modernisirung „Porismen" (*porismes*) doch gewiss keine Uebersetzung genannt zu werden verdient. Mit diesem Werke wollen wir uns nun auch einigermassen beschäftigen, indem wir erstens die Ueberreste aus alter Zeit angeben, von denen bei der Divination Gebrauch gemacht werden muss. Zweitens nennen wir in chronologischer Reihenfolge die Forschungen, die in dieser Beziehung angestellt worden sind. Drittens werden wir versuchen, die Hauptansichten zusammenzustellen und einer Prüfung zu unterwerfen.

I. Von dem Material zur Wiederherstellung der Porismen des Euclid.

Dieses Material selbst ist Nichts weniger als gleichartig. Es besteht nämlich ausser in solchen Stellen, die sich speciell auf die Porismen des Euclid beziehen, auch noch in solchen, wo von Porismen im Allgemeinen, oder gar von Werken anderer Mathematiker die Rede ist, welche denselben Titel führten, aber höchst wahrscheinlich einen ganz anderen Sinn mit diesem Worte verbanden, welches im Laufe der vielen Jahrhunderte, durch die es sich zieht, mehrfach die Bedeutung gewechselt zu haben scheint.

Ist nämlich auch die Abstammung von *πορίζω* — auf den Weg bringen, unzweifelhaft und damit der Zusammenhang mit πείρω, mit Pore, aber auch mit *parare* gegeben, so ist das Wort selbst doch nur bei wenigen weit auseinander liegenden Schriftstellern im Gebrauche, und zwar fast nur bei Mathematikern. Es bedeutet dann in den bei Weitem häufigsten Fällen, wo es als Ueberschrift einzelner Sätze erscheint (in den Elementen des Euclid wie bei späteren Autoren) einen solchen Satz, den wir uns nebenbei erwerben, der unmittelbar aus dem Vorhergehenden folgt, ohne einer neuen strengeren Herleitung zu bedürfen; also das was man einen Zusatz, ein Corollarium zu nennen pflegt. Herr Terquem behauptet zwar (*Liouville*, *Journal des mathématiques* XXI, 194) πόρισμα als Magazin bei Xenophon gefunden zu haben. Da er indessen keine Stelle anführt, so möchten wir fast an einen Irrthum glauben, indem das Wort weder in dem vierbändigen *Lexicon Xenophonteum*, *ed. Sturzius*, *Lipsiae* 1801—1804 überhaupt vorkommt, noch auch in dem grossen *Thesaurus Graecae linguae*, *T.* 6, *Paris* 1842—47 dieser Autor citirt ist. Wäre aber selbst jene Angabe richtig und dürfte daraus der Schluss gezogen werden, Euclid habe seine Schrift etwa „Magazin geometrischer Sätze" nennen wollen, so würde dadurch doch Nichts für die Bestimmung des Inhaltes jenes Werkes gewonnen sein.

Für diesen Zweck sind die Μαθηματικαὶ συναγωγαὶ des Pappus am wichtigsten. Von diesem bedeutenden Werke aus der Mitte des 4ten Jahrhunderts (also etwa 650 Jahre nach Euclid geschrieben) existiren zwar auch keine ganz vollständigen Manuscripte, indem die beiden ersten Bücher fast ganz verloren gegangen sind; doch ist das 7. Buch unversehrt erhalten, welches das einzige ist, das uns hier interessirt. Die Einleitung zu diesem 7ten Buche nämlich ist sowohl bei *Halley*, *Apollonii Pergaei de sectione rationis*, *in* 8°. *Oxoniae* 1706 im Urtexte abgedruckt, als auch nach Vergleichung der Manuscripte Nr. 2368 und 2440 der kaiserlichen Bibliothek zu Paris in einem bald näher zu erwähnenden Aufsatze des Herrn Breton (de Champ) in Liouville's Journal XX, 211; während die lateinische Uebersetzung des 3. bis 8. Buches unter dem Namen *Collectiones mathematicae* von Commandinus besorgt, in mehreren Ausgaben existirt, von welchen uns diejenige vorliegt, welche Pisauri 1602 erschien. In dieser Einleitung werden verschiedene Schriften älterer Mathematiker näher charakterisirt, welche über die Elemente sich erhoben, und so ist auch von den Porismen etwas ausführlicher die Rede. In einer deutschen Uebersetzung lautet der dahin zielende Abschnitt etwa folgendermassen:

„Nach den „Berührungen" kommen die 3 Bücher „Porismen" des Euclid, in vielen Beziehungen die kunstreichste Sammlung zur Auflösung schwieriger Probleme und ganzer Klassen von Sätzen, wie sie die Natur in unbegrenzter Weise darbietet. Zu dem, was Euclid zuerst schrieb, wurde auch Nichts hinzugefügt, als dass einige ungeschickte Menschen vor und zu einigen wenigen derselben zweite Lesarten (δευτέρας γραφάς) beibrachten. Denn jedes Porisma kann zwar in der Menge nach beschränkten

Darstellungsweisen angegeben werden, aber Euclid gab immer nur eine und diese nur sehr angedeutet (*τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν*). Sie bieten eine feine, natürliche, nothwendige und allgemeinere Theorie dar, voller Annehmlichkeit für die, welche sehen und finden (*ποϱίζειν*) können. Sie haben alle weder den Anschein von Lehrsätzen noch von Aufgaben, sondern von einer Gattung, die sich etwa in der Mitte hält, sodass der Ausdruck derselben in die Form von Lehrsätzen und von Aufgaben gebracht werden kann. Aus diesem Grunde haben viele Mathematiker, die nur auf die Form des Ausdruckes sahen, sie bald zu den Lehrsätzen, bald zu den Aufgaben zählen wollen. Dass die Alten den Unterschied der drei Gattungen besser kannten, zeigt sich aus den Definitionen. Denn sie nannten den Ausspruch einen Lehrsatz, wenn es sich um den Nachweis (*ἀπόδειξιν*) des Ausgesprochenen handelte; eine Aufgabe, wenn es sich um die Construction (*κατασκευήν*) desselben handelte; endlich ein Porisma, wenn es sich um die Porismirung (*ποϱισμόν*) desselben handelte. Diese Definition des Porismas wurde von den Neueren verändert, welche nicht Alles finden können, sondern auf diese „Elemente" gestützt, nur zeigen, dass das, was gesucht wird, existirt (*δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦϑ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον*) nicht aber dieses selbst finden. So schrieben sie, obschon durch die Definition selbst und das Erlernte widerlegt, nach einem Nebenumstande (*ἀπὸ συμβεβηκότος*): Ein Porisma sei das, was zur Hypothese eines Ortstheorems fehle. Von dieser Gattung der Porismen sind die Oerter selbst eine Art, auch kommen Erstere häufig in dem „aufgelösten Orte" vor. Letztere wurden nach Absonderung der Porismen gesammelt, mit Ueberschriften versehen und überliefert, weil sie von grösserer Reichhaltigkeit als die anderen Arten waren. Wenigstens giebt es unter den Oertern: ebene, körperliche, lineäre, endlich solche, die sich auf mittlere Proportionalen beziehen. Mit den Porismen andererseits ging es so: der Vordersatz derselben wurde durch die Verdrehung (*διὰ τὴν σκολιότητα*) von Vielen, was in der Regel stillschweigend verstanden ward, so beschnitten, dass viele Mathematiker nur einzelne Theile auffassten und das Nothwendigere der Bedeutung verkannten."

Die nun folgende Periode ist offenbar so verstümmelt und in den verschiedenen Uebersetzungen so entgegengesetzt aufgefast, dass wir es nicht wagen, eine Interpretation davon zu geben. Doch scheint sie nicht von bedeutender Wichtigkeit zu sein. Im Urtexte lautet sie: *Πεϱιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ πϱοτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου ἔιδους τεϑεικέναι ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα πολυπληϑίας ἐν ἢ ὀλίγα πϱὸς ἀϱχήν. Δεδομένον τοῦ πϱώτου βιβλιου τέϑεικεν ὁμοειδῆ παϱ' ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέϱου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα τὸ πλῆϑος.* Darauf giebt Pappus ein Beispiel in einem Satze, der der heutigen Theorie der Transversalen angehören würde, und den er in einer Allgemeinheit ausspricht, welche er als sein Eigenthum documentirt, wenn auch mit den bescheidenen Worten: Auch diese Verallgemeinerung sei dem Euclid wohl nicht unbekannt gewesen. Und endlich erscheint eine Art von Inhaltsverzeichniss der drei Bücher Porismen, so concis aber auch so gleichförmig abgefasst, dass wir nicht zweifeln können, es sei hier eine zum Theil wörtliche Abschrift dessen vorhanden, was vielleicht in den Ueberschriften der einzelnen Porismen enthalten war. So sind z. B. alle diese Aussprüche durch ὅτι eingeführt, ohne dass ein regierendes Zeitwort vorhergeht, woraus schon von Herrn Breton (de Champ) mit Recht gefolgert wurde, es müsse dies wohl die canonische Form gewesen sein. Ohne eine Uebersetzung jenes ganzen Inhaltsverzeichnisses zu geben, wollen wir hier nur Einiges über das erste Buch anführen, wo es heisst:

„Inhalt des Folgenden: dass ein gewisser Punkt eine der Lage nach gegebene Grade beschreibt; dass zwei gewisse Linien in gegebenem Verhältnisse stehen; dass eine gewisse Linie zu einem Abschnitte in gegebenem Verhältnisse steht; dass eine gewisse Linie der Lage nach gegeben ist; u. s. w., u. s. w.“

Ueberdies enthält das 7. Buch selbst noch 38 Sätze, auch fast alle in die Theorie der Transversalen einschlagend, die von Pappus als Lemmen zu den Porismen bezeichnet werden und den Schluss dessen bilden, was diesem Autor entnommen werden kann.

Etwa gleichzeitig mit Pappus lebte Diophant, dessen Blüthezeit nach Nesselmann's gelehrten Untersuchungen (Geschichte der Algebra bei den Griechen, S. 245—252) etwa an das Ende des 4ten Jahrhunderts fällt, wie ihn auch Abulpharajus in die Regierung des Kaisers Julianus Apostata 361—363 setzt. Auch Diophant scheint ein eigenes Werk „Porismen“ geschrieben zu haben, welches aber noch weniger Spuren hinterlassen hat, als die des Euclid. Nur an drei Stellen, nämlich bei der 3ten, 5ten und 6ten Aufgabe des V. Buches, citirt Diophant selbst Sätze aus dieser Schrift, welche Nesselmann folgendermassen übersetzt:

„Und da wir in den Porismen den Satz haben, dass wenn zwei Zahlen so beschaffen sind, dass sowohl jede von ihnen als das Product beider ein Quadrat wird, wenn man dieselbe gegebene Zahl dazu addirt, diese Zahlen dann aus zwei auf einander folgenden Quadraten entstanden sind, so ....“

„Und wir haben abermals in den Porismen den Satz, dass wenn man zu zwei auf einander folgenden Quadratzahlen eine andere Zahl nimmt, welche um 2 grösser ist als die doppelte Summe jener beiden, man dann drei Zahlen von der Beschaffenheit hat, dass das Product von je zweien, sowohl wenn die Summe der beiden multiplicirten, als auch wenn die dritte Zahl dazu addirt wird, ein Quadrat wird“.

Das letzte dieser Diophantischen Porismen endlich, welches sich wörtlich nicht wieder herstellen lässt, hatte den Sinn, dass die Differenz zweier

Kubikzahlen sich immer auch in die Summe zweier Kubikzahlen zerlegen lasse.

Noch einen dritten griechischen Schriftsteller giebt es, der hier in Betracht kommt: Proclus Diadochus, aus dem 5. Jahrhundert. Von diesem werden zwei auf die Bedeutung der Porismen bezügliche Stellen angeführt, beide in seinem Commentare zu dem ersten Buche der Euclidischen Elemente, welcher im Urtexte als Anhang zu der Ausgabe des Euclid, Basileae 1533, fol. vorhanden ist und in lateinischer Uebersetzung durch Franciscus Barocius noch besonders, Patavii 1560, fol. erschien. Die erste Stelle zu Euclid I, 1. (*ed. Bas. p.* 58, *ed. Pat. p.* 121) giebt an:

„Der Name Porisma wird für gewisse Probleme gebraucht, wie die Porismen des Euclid; eigentlich aber hat er die Bedeutung, dass aus dem Bewiesenen noch zugleich ein anderer Satz mit hervorgeht, ohne dass wir uns denselben zum Ziele gesetzt, und welcher deshalb Porisma genannt wird, als ein Gewinn, der nebenbei aus dem zur Sache gehörigen Beweise gezogen wird."

Ist hier einerseits also angegeben, was die sogenannten Porismen des Euclid nicht sind, so giebt die zweite Stelle etwas positivere Auskunft. Diese Stelle zu I, 15. gehörig (*ed. Bas. p.* 80, *ed. Pat. p.* 173) heisst folgendermassen:

„Porisma ist ein bei den Mathematikern gebräuchliches Wort von doppelter Bedeutung. Einmal nennt man es ein Porisma, wenn ein Satz aus dem Beweise eines anderen Satzes mit erhalten wird als Fund oder grade vorhandener Gewinn bei dem Gesuchten, zweitens aber auch, wenn Etwas zwar gesucht wird, aber, um von der Erfindung Gebrauch zu machen, und nicht von der Entstehung oder der einfachen Anschauung. Dass z. B. die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich sind, muss aus der Anschauung hervorgehen, und ähnlich ist die Kenntniss aller vorhandenen Dinge. Ferner einen Winkel halbiren, oder ein Dreieck verzeichnen, oder Etwas wegnehmen oder hinzusetzen, das Alles verlangt eine Ausführung. Aber den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises finden, oder das grösste gemeinsame Maass zweier commensurablen Grössen finden und dergleichen mehr, das liegt in der Mitte zwischen einem Theoreme und einem Probleme. Da hat man es nicht mit der Entstehung des Gesuchten zu thun, sondern mit dessen Erfindung, und auch eine blosse Anschauung genügt nicht. Man muss das Gesuchte in das Gesichtsfeld bringen und vor den Augen ausführen. Von dieser Art sind auch die Porismen, welche Euclid schrieb, als er seine Bücher „Aufgaben" zusammenstellte. Doch von diesen Porismen wollen wir nicht weiter reden."

II. Von den Divinatoren der Porismen des Euclid.

Waren wir genöthigt, in dem vorigen Paragraphe sämmtliches Material vorzuführen, zum Theil weil überhaupt noch keine deutsche Uebersetzung dieser Stellen veröffentlicht ist, zum Theil auch weil wir uns mit den sonstigen Uebersetzungen in neuern Sprachen nicht immer einverstanden erklären konnten, so wird es uns dafür erlaubt sein, uns hier desto kürzer zu fassen, da wir doch nur wiederholen könnten, was schon in Chasles, Geschichte der Geometrie (S. 283 der deutschen Uebersetzung) angegeben ist, und höchstens einige neuere Arbeiten hinzuzufügen hätten. Wir wollen daher in der That nur diese letzteren angeben, für Alles frühere auf die erwähnte Stelle verweisend, und nennen somit:

Chasles, Geschichte der Geometrie, Note III. (S. 273 — 286 der deutschen Uebersetzung);

Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen, S. 437 — 446.

Breton (de Champ) in den *Comptes rendus de l'Académie des sciences* vom 29. October 1849 und 6. Juni 1853 und namentlich in *Liouville, Journal des mathématiques T. XX, p.* 209 — 299;

Ch. Housel in *Liouville, Journal des mathématiques, T. XXI, p.* 193 bis 209 (Maiheft des Jahrganges 1856).

III. Inhalt der Porismen nach den verschiedenen Ansichten.

Etwas ausführlicher wieder werden wir in diesem dritten Paragraphen uns aussprechen müssen, wo, wenn nicht alle, doch die meisten Ansichten anzuführen sind, die über die Porismen des Euclid und über Porismen überhaupt in früherer oder späterer Zeit aufgestellt worden sind.

Zuerst bietet sich uns zur Besprechung die Abhandlung des Herrn Breton (de Champ), weil sie am Wenigsten bestimmt, was die Porismen eigentlich waren. Seine Schlüsse bestehen im Wesentlichen in Folgendem: Es seien die Porismen die Relationen gewesen, welche am Häufigsten bei geometrischen Untersuchungen vorkamen und der Gedanke bei der Abfassung jenes Werkes müsse der gewesen sein, Beispiele jener Relationen (jenes inneren Zusammenhanges einzelner Untersuchungen) und zugleich der allgemeinen Methoden zu liefern, welche in den einzelnen Fällen anzuwenden waren. Es seien, heisst es bei ihm, die Porismen keine Sätze (*propositions*) gewesen, sondern sie hätten als Antworten auf eine Reihe von Fragen gedient, welche uns von Pappus nicht aufbewahrt worden, wenn schon die eigentlichen Porismen des Euclid fast vollständig in die *Collectiones mathematicae* übergegangen seien. Die Stellen des Proclus hingegen werden ganz zurückgewiesen, weil diese nur auf Sätze der „Elemente“ sich beziehen, die den Porismen ähneln, nicht aber auf diese selbst.

In seinen früheren Publicationen hat der gelehrte Herr Verfasser zwar mit kürzerer Begründung doch fester behauptet, was die Porismen gewesen seien. In der Notiz vom 29. October 1849 findet er in ihnen die sogenannte Transformation der Figuren, dasselbe Thema, welches Newton in allgemeiner Fassung in dem 22. Lemma des ersten Buches der Principien behandelt habe, und welches dort durch die Worte bezeichnet werde: *Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.* Und diese Erklärung scheint ihm ausserdem noch mit der von Herrn Poncelet gegebenen übereinzustimmen.

In letzterer Beziehung können wir ihm allerdings einigermassen beipflichten. Denn in der Einleitung zu dem *Traité des propriétés projectives des figures* heisst es: die Porismen des Euclid hätten keinen anderen Inhalt gehabt, als die allgemeinsten, abstractesten Eigenschaften der Figuren, deren Charakter nur schwer durch die Sprache der alten Geometrie definirbar war. Mit einem Worte, es lägen hier wirkliche projectivische Eigenschaften vor, die Euclid durch Betrachtungen, die der Perspective angehören, abgeleitet habe.

Kehren wir indessen zu Herrn Breton (de Champ) zurück, so finden wir in dessen Notiz vom 6. Juni 1853 wieder eine neue Ansicht aufgestellt, welche folgendermassen ausgedrückt wird: „Bei den Griechen galt eine Frage nur dann als Problem, wenn sie sich in die Worte fassen liess, wie wird diese oder jene Sache ausgeführt? Nun giebt es aber Fragen, welche durch die Erfindung oder den Ausspruch einer Wahrheit gelöst werden; und diese Fragen konnten die Griechen, wenn sie sich überhaupt damit beschäftigten, nicht als eigentliche Probleme anerkennen. Diese Fragen nun bildeten die Porismen". Offenbar schliesst sich diese Erklärungsweise, von der ersten total verschieden, an dieselben Stellen des Proclus an, die in der dritten Abhandlung wieder zurückgewiesen werden. So dass es wohl einige Verwunderung erregen darf, wie am Eingange der letzteren Abhandlung gesagt werden kann, sie sei nur eine weitere Ausführung des schon in jenen Notizen in den *Comptes rendus* Enthaltenen.

Eine weitere Ansicht führen wir fast mit einer gewissen Scheu an, da sie zu sehr entlegenen Zeiten von zwei Männern aufgestellt wurde, welche Frankreichs Mathematiker mit Stolz zu den Ihren rechnen, von Fermat und Chasles. Nach diesen Beiden ist die allgemeine Aufgabe, welche durch die Porismen gelöst werden sollte, folgende: „Wenn ein Ort durch eine allen seinen Punkten gemeinsame Construction oder durch ein gewisses Coordinatensystem bestimmt ist, dann eine andere Construction oder ein anderes Coordinatensystem zu finden, welche allen Punkten dieses Ortes genügen und wodurch man die Natur und die Lage desselben erkennet". Herr Chasles setzt noch hinzu: die Data seien Ergänzungen der Elemente. Sie lehren aus den Bedingungen einer Aufgabe Alles das folgern, was aus ihnen vermöge der Elemente hervorgeht. Ebenso verhielten sich die Porismen zu den Oertern (?). Sie dienten zur Kenntniss der Oerter zu gelangen, indem sie die Mittel darböten, aus den Bedingungen, durch welche ein unbekannter Ort bestimmt wird, einen einfacheren Ausdruck dieses Ortes zu erhalten, der seine Natur und seine Lage näher kennen lehrt.

Diese Erklärungsweise ist eine so allgemein gehaltene, dass unter dieselbe wohl ganz verschiedene Ansichten sich subsumiren lassen, und sagt uns deshalb von den bisher gegebenen am Meisten zu. Was die Anwendung auf die Porismen des Euclid betrifft, so hat Herr Chasles seine Divination derselben noch nicht veröffentlicht; wir können uns daher kein Urtheil darüber erlauben, und nur die Hoffnung aussprechen, es möge dabei nicht zu viel Gewicht auf die Lemmen des Pappus gelegt sein, bei deren Gebrauch schon Herr Breton (de Champ) mit Recht zu der grössten Vorsicht ermahnt. Denn, wie dieser Gelehrter bemerkt, sind unter den 70 Lemmen, die zu den Kegelschnitten gehören, nur 3, in welchen wirklich Kegelschnitte vorkommen; und ebenso dürfte es sich mit den Lemmen zu den Porismen verhalten.

Viel specieller und auch im Ausdrucke weniger klar gehalten ist die Definition der Porismen, welche Robert Simson gab (*Roberti Simson Opera quaedam reliqua, in 4⁰. Glasgow* 1776), und welche vielleicht wegen ihrer dunkeln Fassung über ein halbes Jahrhundert lang die öffentliche Meinung beherrschte. In der möglichst getreuen Uebersetzung von Sohncke (Geschichte der Geometrie von Chasles, S. 10) lautet sie wie folgt: „Ein Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesprochen wird, dass man gewisse Dinge bestimmen könne, und in welchem man sie auch wirklich bestimmt, wenn deren Beziehung zu festen und bekannten und auch zu solchen Dingen gegeben ist, welche bis in's Unendliche variirt werden dürfen, wobei diese letzteren durch eine oder mehrere Relationen unter einander verbunden sind, welche das Veränderungsgesetz, dem sie unterworfen sind, bilden."

Die neueste Arbeit über die Porismen von Herrn Housel giebt eine so kühne Interpretation der Stellen des Pappus, dass wir sie gewagt nennen möchten, und uns nicht damit einverstanden erklären können, wenn einem Worte ein Sinn zugetheilt wird, von dem es nicht wenigstens constatirt ist, dass er überhaupt möglich ist, und wenn dann auf dieses eine Wort ein ganzes System gebaut wird. So macht es aber Herr Housel. Das Wort συμβεβηκός nämlich, welches wir als „Nebenumstand" übersetzten (wir haben es bei der betreffenden Stelle in Klammern beigefügt), nimmt Herr Housel als einen Kunstausdruck, den er durch *accident* übersetzt, wofür wir das Wort „Accidenz" gebrauchen wollen. Dann sagt er, bei dem Porisma käme es einerseits auf das Gesuchte an, andererseits auf die Hypothese, und letztere zerfalle in zwei Theile, in die eigentliche Hypothese und in die Accidenz. Jene enthalte die festen Bedingungen des Porismas, diese, die Accidenz, enthalte die Bedingungen der Veränderlichkeit. Als Beispiel wird das von Simson wiederhergestellte Porisma benutzt, wonach, wenn die vier Linien eines vollständigen Vierseits sich in

6 Punkten schneiden, von denen 3 in einer Graden liegende gegeben sind, und wenn von den 3 übrigen Punkten 2 der Bedingung unterworfen sind, je auf einer gegebenen Graden zu bleiben, auch der letzte Punkt eine grade Linie zum geometrischen Orte haben wird. In diesem Beispiele besteht nach Herrn Housel die Hypothese darin, dass 3 von den 6 Punkten fest gegeben sind; die Accidenz erfordert, dass 2 von den übrigen Punkten auf 2 gegebenen graden Linien sich bewegen; und diese beiden Bedingungen zusammen bilden die Hypothese im weiteren Sinne. Das Resultat endlich besteht darin, dass der letzte Punkt alsdann eine grade Linie beschreibt. So wird also endlich die Definition des Porismas abgeleitet: es beschäftige sich mit den Sätzen, die bei der Bewegung einzelner Theile der Figuren auftreten. Wir geben Herrn Housel gern zu, dass er vielen Scharfsinn in dieser Conjectur an den Tag gelegt hat, müssen aber zu viel Willkürlichkeit in seiner Grundannahme finden, als dass wir mehr als eben eine Conjectur darin erkennen sollten.

Führen wir endlich noch die Ansicht des Herrn Nesselmann an, so glaubt dieser Gelehrte aus der Stelle des Pappus folgern zu müssen, dass die Neueren (natürlich die Neueren des Pappus) solche Sätze mit dem Namen der Porismen belegt hätten, die neben dem als Theorem ausgesprochenen Satze noch eine auszuführende Operation oder Construction in sich schliessen; mit anderen Worten solche Sätze, welche die Möglichkeit einer zu bewerkstelligenden Operation aussprechen; die also als Lehrsatz ausgesprochen die Ausführung einer Operation, als Aufgabe ausgesprochen einen ihre Möglichkeit bestimmenden Lehrsatz voraussetzen. Auf den Begriff hingegen, den die Alten mit dem fraglichen Worte verbanden, wird als den näheren Zweck nicht berührend gar nicht eingegangen.

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen glauben wir nun gezeigt zu haben, wie widersprechend die einzelnen Ansichten über den Inhalt der verlorenen Porismen sind, und wie es gerade die Theile der Wissenschaft waren, mit denen die einzelnen Divinatoren sich besonders beschäftigten, welche sie in den Porismen suchten und dann auch fanden. So war es kein Wunder, wenn Fermat, der Mitbegründer der analytischen Geometrie, diese in den Porismen wieder erkannte; wenn der Verfasser der *Géométrie supérieure* in den Porismen einen Vorläufer dieses seines Werkes fand; wenn Herr Poncelet in ihnen projectivische Eigenschaften der Figuren auftreten sah; und es sollte uns wundern, wenn Herr Housel sich nicht vielfach mit Mechanik beschäftigt hätte, da er die Porismen auf Bewegungserscheinungen zurückführt. Es würde im höchsten Grade anmassend erscheinen, wenn wir nach diesen Bemerkungen und nach dem, was am Anfange dieses Aufsatzes gesagt ist, unsere eigenen Gedanken als maassgebend ausposaunen wollten. Wenn wir sie hier in Kürze noch beifügen, so wollen wir im Gegentheile nur dadurch angeben, wie sich in unserem Geiste die Wissenschaft der Alten abspiegelt, die wir uns, wir gestehen es offen ein, immer lieber mit dem Studium der Analysis als der Geometrie beschäftigt haben. Von diesem Standpunkte aber erscheint uns folgende Lösung der Aufgabe.

Die Mathematik der Alten ist in den wesentlichsten Beziehungen von der der Neuzeit verschieden. Sie unterscheidet sich nicht blos in der Darstellungsweise des Einzelnen, auch die Anordnung des Ganzen hat sich durchaus geändert. Bei den Alten stand die Geometrie an der Spitze der ganzen Mathematik. Die Arithmetik war nur ein Anhängsel derselben, arithmetische Sätze wurden nur abgeleitet, wenn sie eine geometrische Bedeutung hatten, galten nur, wenn diese geometrische Deutung zulässig war. Daher die Beschränktheit der Analysis bei den Alten, wenn wir unter diesem Namen allgemein den Theil der Mathematik verstehen, der sich mit Zahlengrössen und deren Verknüpfung beschäftigt. Im schroffen Gegensatze dazu stellen die neueren Mathematiker die Analysis an die Spitze von dem richtigen Gedanken ausgehend, dass die Zahl als allgemeinste Grösse zuerst betrachtet werden muss, um sodann zur Vergleichung der übrigen Grössen zu dienen. Daraus folgt, dass bei den Griechen eine ganze Reihe von Sätzen in geometrischer Gestalt auftritt und auftreten muss, welche ursprünglich gewiss Zahlensätze waren. Wir erinnern nur an den bekanntesten aller geometrischen Sätze, an den pythagoräischen Lehrsatz. Daraus folgt aber ferner, dass, um manche Sätze und ihren innern Zusammenhang mit Vorhergehendem und Folgendem recht zu würdigen, wir dieselben erst in unseren neueren Gedankenkreis überführen, sie in analytische Form bringen müssen. So dürfte es sich auch mit den Porismen verhalten. Es dürften in ihnen Wahrheiten enthalten sein, die auch der neueren Analysis Stoff zu interessanten Untersuchungen bieten, wenn auch die andere Form sie nicht sogleich wiedererkennen lässt. Und suchen wir in dieser Absicht die Untersuchungen der Analysis so zu classificiren, dass die einzelnen Abtheilungen den Abtheilungen entsprechen, welche namentlich von Proclus definirt werden, so glauben wir die Analogieen in folgender Weise aussprechen zu können:

„Eigenschaften einer gegebenen Function zu finden, giebt das Theorem an; Werthe der Function bei gegebenem Argumente leitet das Problem ab; endlich aus Eigenschaften auf die Art der Function schliessen, lehrt das Porisma."